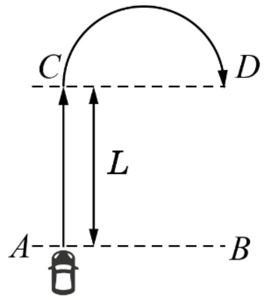


Задача 2.9.1. Испытания автомобилей (10 баллов). Автомобиль должен проехать с постоянным ускорением прямой участок длиной L от линии старта AB до линии CD и, после её пересечения, развернувшись по дуге окружности на 180^0, пересечь эту линию в обратном направлении (см. рис.). Начальная скорость автомобиля равна нулю, а на закругленном участке постоянна и равна скорости, достигнутой при разгоне по прямой. Ускорение автомобиля во время всего движения не должно превышать $a_{\max}$.

Во сколько раз время t_1 движения автомобиля от A до D при разгоне на участке AC с ускорением $a_{\max}$, превышает минимально возможное время t_2 движения от A до D?

Возможное решение (С. Кармазин). Пусть разгон происходит с ускорением a. Тогда время движения на участке AC равно $\tau_1 = \sqrt{2L/a}$, а достигнутая при этом скорость $u_1 = \sqrt{2La}$. Минимально возможный радиус закругления определяется максимально возможным ускорением и равен $R_{\min} = u_1^2 / a_{\max} = 2La / a_{\max}$. Время движения автомобиля на закруглении $\tau_2 = \pi R_{\min} / u_1 = \pi\sqrt{2La} / a_{\max}$. Общее время

$$t_1 = \tau_1 + \tau_2 = \sqrt{\frac{2L}{a}} + \frac{\pi}{a_{\max}}\sqrt{2La} = \sqrt{\frac{2\pi L}{a_{\max}}}\left(\sqrt{\frac{a_{\max}}{\pi a}} + \sqrt{\frac{\pi a}{a_{\max}}}\right). \qquad (1)$$

Выражение в скобках принимает минимальное значение равное 2 при $\sqrt{a_{\max}/(\pi a)} = 1$ (неравенство Коши). Таким образом минимально возможное время

$$t_2 = 2\sqrt{2\pi L / a_{\max}} = 2\sqrt{2\pi}\sqrt{L / a_{\max}}\ . \qquad (2)$$

и достигается при $a_1 = a_{\max}/\pi$, что не противоречит условию $a_1 < a_{\max}$.

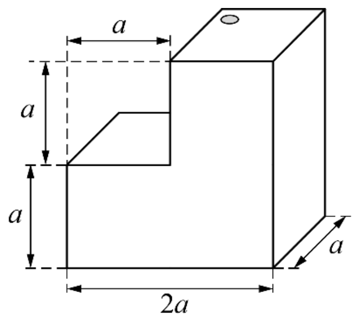
Если не пользоваться неравенством Коши, то следует либо взять производную по a, либо приравнять выражение в скобках из (1) к некоторой переменной $y = \sqrt{a_{\max}/(\pi a)} + \sqrt{\pi a / a_{\max}}$, возвести это уравнение в квадрат и решать полученное квадратное уравнение относительно a. Дискриминант этого уравнения окажется равным нулю при $y = 2$ и отрицательным при $y < 2$. Следовательно, $y = 2$ – это минимально возможное значение для y, и при этом $a_1 = a_{\max}/\pi$.

При разгоне с максимально возможным ускорением $a = a_{\max}$ время испытания (выражение (1)) равно

$t_1 = \tau_1 + \tau_2 = \sqrt{\frac{2\pi L}{a_{\max}}}\left(\sqrt{\frac{1}{\pi}} + \sqrt{\pi}\right) = \sqrt{\frac{2L}{a_{\max}}}(1+\pi)$. Окончательно, $n = \frac{t_1}{t_2} = \frac{1+\pi}{2\sqrt{\pi}} \approx 1{,}17$.

№	**Задача 2.9.1. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Указано, что минимальный радиус закругления при разгоне $R_{\min} = 2La / a_{\max}$	2
2	Найдено время движения на участке AC: $\tau_1 = \sqrt{2L/a}$	1
3	Найдено время движения на закруглении: $\tau_2 = \pi\sqrt{2La} / a_{\max}$	1
4	Найдено минимально возможное время испытания t_2 (любым способом)	3
	Если идея нахождения минимума не реализована, то за пункт 4 больше 1 балла не ставить	
5	Найдено время испытания t_1 при разгоне с максимально возможным ускорением	2
6	Получен ответ задачи: $n \approx 1{,}17$	1

Задача 2.9.2. Трехлитровый сосуд (10 баллов). Тонкостенный сосуд (в форме уголка) без дна, изображенный на рисунке, установлен на гладкой горизонтальной поверхности. В него через небольшое отверстие в правой верхней грани наливают воду. Когда 5/6 объема сосуда оказывается заполненным, вода начинает вытекать из-под него. Определите массу сосуда если известно, что $a = 10$ см, а плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.



Возможное решение (А. Евсеев). В момент начала подтекания результирующая сил давления воды на горизонтальную грань и сила тяжести сосуда не лежат на одной прямой. Поэтому он начинает поворачиваться вокруг правого нижнего ребра, относительно которого и будем рассматривать моменты сил.

Приподнимать сосуд будет сила давления воды на левую верхнюю грань. Подтекание начинается, когда заполнено 5/6 объема. В этот момент давление на верхнюю грань равно $\rho g a / 2$, а сила давления $\left(\rho g a / 2\right) a^2$. Плечо этой силы равно $3a/2$.

С силой тяжести главная сложность заключается в определении положения центра масс конструкции. Разобьем сосуд на одинаковые части (например, на листы размером $a \cdot a$), для которых положение центра масс однозначно определяется, и запишем моменты сил этих частей. Обозначим массу одной такой части – m. Тогда полная масса сосуда будет равна $M = 12m$. По правилу моментов:

$$2mg \cdot 0 + 5mg \cdot \left(a/2\right) + mg \cdot a + 3mg \cdot \left(3a/2\right) + mg \cdot 2a = \left(\rho g a / 2\right) a^2 (3a/2).$$

После приведения подобных получим: $m = \rho a^3 (3/40)$. Отсюда: $M = 0{,}9 \rho a^3 = 0{,}9$ кг.

№	**Задача 2.9.2. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1	Учтено, что конструкция будет вращаться вокруг правой нижней грани	2
2	Записано выражение для силы давления воды	2
3	Корректный учёт момента силы тяжести конструкции	2
4	Записано правило моментов	2
5	Получена формула $M = 0{,}9 \rho a^3$	1
6	Числовое значение массы сосуда	1

Задача 2.9.3. Девять резисторов. Электрическая цепь состоит из девяти одинаковых резисторов и трёх идеальных амперметров (A_0, A_1, A_2). Через амперметр A_0 протекает ток силой I_0 = 9 мА. Определите показания амперметров A_1 и A_2.

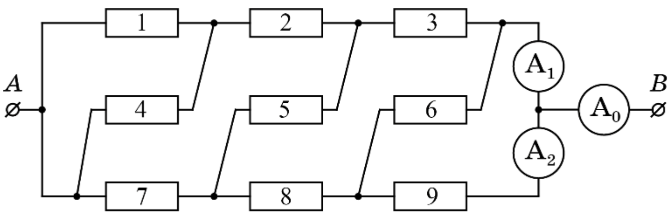


Рис. 1

Возможное решение (В. Слободянин). Резисторы R_1 и R_4 соединены параллельно, а резистор R_2 последовательно с ними. Эквивалентное сопротивление этого участка $R_Э = R_{1,4} + R_2 = 1{,}5R$. Такое же эквивалентное сопротивление получается из резисторов R_8, R_6 и R_9. На рис. 2 приведена упрощенная схема исходной цепи. Это несбалансированный электрический мост.

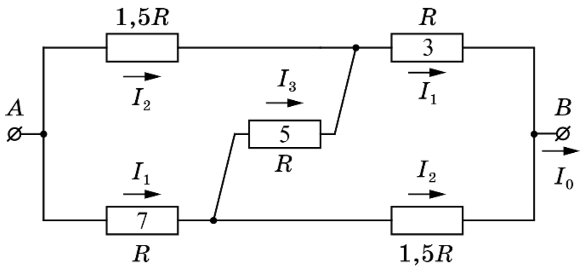


Рис. 2

Введём обозначения токов, протекающих через него. Заметим, что через резисторы R_3 и R_7 силы протекающих токов одинаковы.

Запишем систему уравнений:

$$1)\quad I_1 + I_2 = I_0;$$

$$2)\quad I_2 + I_3 = I_1;$$

$$3)\quad 1{,}5RI_2 = RI_1 + RI_3.$$

Откуда получим: I_1 = 5 мА, I_2 = 4 мА.

Вернёмся к исходной схеме. На рис. 3 показано распределение токов, протекающих через резисторы R_3, R_6 и R_9, а также амперметры A_0, A_1, A_2. Ток I_2 распределяется поровну меду резисторами R_6 и R_9. Следовательно, сила тока, протекающего через амперметр A_2 равна $I_{A2} = I_2 / 2 = 2$ мА, а через амперметр A_1 равна $I_{A1} = I_1 + I_2 / 2 = 7$ мА или $I_{A1} = I_0 - I_{A2} = 7$ мА.

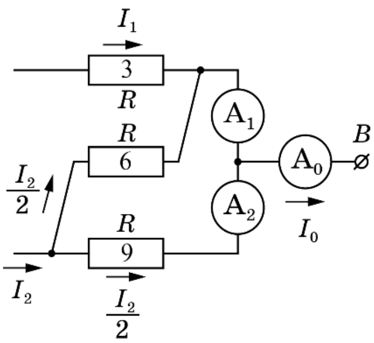


Рис. 3

№	Задача 2.9.3. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Упрощение исходной схемы путем нахождения эквивалентного сопротивления участков (по 1 баллу за каждый этап)	3
2	Определение силы токов полученной схемы (любым способом)	3
	Записано уравнение (1) (1 балл)	
	Записано уравнение (2) (1 балл)	
	Записано уравнение (3) (1 балл)	
3	Решена система уравнений (1), (2), (3) и	2
	найдена сила тока I_1 (1 балл)	
	найдена сила тока I_2 (1 балл)	
4	Найдены показания амперметров (по 1 баллу)	2

Задача 2.9.4. Испарение азота (1) (20 баллов). В стакан, установленный на весах, налит жидкий азот. Из-за теплообмена с окружающей средой азот выкипает и показания весов уменьшаются. В некоторый момент времени в стакан опускают цилиндр, имеющий комнатную температуру ($t_0 = +24^\circ\text{C}$). Зависимость показания весов от времени приведена в таблице.

τ, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m, г	250,0	244,0	238,0	232,0	289,5	270,5	251,5	232,5	220,0	214,0	208,0	202,0	196,0

- Постройте график зависимости $m(\tau)$.
- Определите удельную теплоту λ испарения азота.

Температура кипения азота $t_\text{К} = -196^\circ\text{C}$, масса цилиндра $M = 70$ г. Зависимость удельной теплоемкости материала цилиндра от температуры в диапазоне от -200°C до $+50^\circ\text{C}$ линейная, при этом удельная теплоемкость при -200°C равна 300 Дж·кг/$^\circ$C, а при 50°C равна 1200 Дж·кг/$^\circ$C.

Возможное решение (А. Аполонский). До погружения цилиндра в стакан испарение азота происходит за счет тепла, поступающего из окружающей среды. Мощность теплообмена такова, что за 1 мин испаряется 6 г азота.

После погружения в азот цилиндра интенсивность испарения возрастает из-за теплообмена с цилиндром до тех пор, пока его температура не уменьшится от комнатной до температуры кипения жидкого азота.

Из-за теплообмена с цилиндром дополнительно испаряется масса азота равная

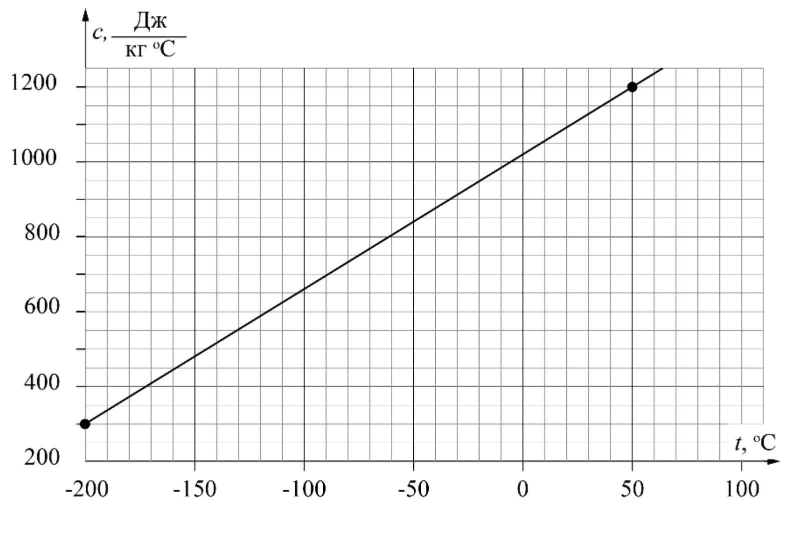
$$\Delta m = \frac{Q}{\lambda}.$$

Здесь Q – количество теплоты, которое отдает цилиндр при охлаждении.

Ввиду линейности зависимости удельной теплоемкости от температуры для расчета Q можно использовать среднее значение теплоемкости $c_\text{ср}$, соответствующее температуре -86°C.

При заданных значениях теплоемкости в интервале температур от -200°C до $+50^\circ\text{C}$ значение $c_\text{ср}$ = 710 Дж/(кг$^\circ$C). При этом

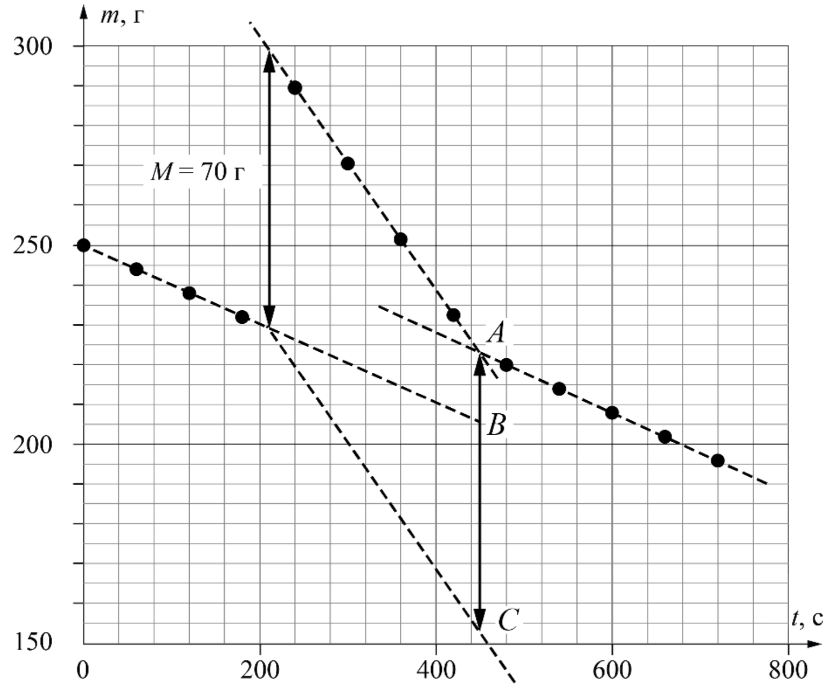
$$Q = c_\text{ср} M\left(t_0 - t_\text{К}\right). \quad (1)$$



Вместо значения $c_{\text{ср}}\left(t_0-t_{\text{К}}\right)$ можно в формулу (1) подставить величину, пропорциональную площади под графиком $c(t)$ для интервала температур $t\in\left(-196^\circ\text{C}\div+24^\circ\text{C}\right)$. В результате получим:

$$Q=c_{\text{ср}}M\left(t_0-t_{\text{К}}\right)=\left(710\cdot 0{,}070\cdot 220\right)\text{ кДж}=10{,}9\text{ кДж}.$$

По таблице построим график зависимости $m(\tau)$.



Из графика видно, что до 210 с идёт испарение азота, обусловленное теплообменом с окружающей средой. В районе 210 с в стакан опустили цилиндр (наблюдается скачок в показаниях весов равный 70 г), а после 450 секунд скорость испарения азота сравнялась с первоначальной. Следовательно, цилиндр остыл до температуры кипения азота и тепло по-прежнему поступает только в результате теплообмена с окружающей средой.

Если бы цилиндр в азот не погружали, то к 450 секунде показания весов оказались равными 205 г. С учетом массы цилиндра весы показывали бы 275 г. Таким образом, дополнительно испарившаяся масса азота $\Delta m_a\approx 52$ г (длина отрезка BC). Отсюда

$$\Delta m_a=\frac{Q}{\lambda}=\frac{c_{\text{ср}}M\left(t_0-t_{\text{К}}\right)}{\lambda}. \qquad \lambda=\frac{Q}{\Delta m_a}\approx\frac{10{,}9}{0{,}052}\left(\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}\right)=210\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

№	**Задача 2.9.4. Критерии оценивания (20 баллов)**	**Баллы**
1	Построен график зависимости массы азота (или массы испарившегося азота) от времени. При этом график хорошо читается, подписаны координатные оси, выбран удобный масштаб и т.д.	8
	Подписаны оси и указаны единицы измерения (1 балл)	
	Выбран разумный масштаб координатных осей (1 балл)	
	Нанесены все экспериментальные точки (1 балл)	
	Через экспериментальные точки проведены соответствующие линии (прямые на начальном и на конечном участках графика) (2 балла)	
	В окрестности 210 с показан скачок массы на 70 г (2 балла)	
	Выполнена экстраполяция начального участка графика (до 450 с т.е. до пересечения с отрезком AC) (1 балл)	
2	Записано уравнения теплового баланса, получена формула $\lambda = Q / \Delta m_a$	2
	Определено количество теплоты, отданное при охлаждении цилиндра $Q \in (10,7 \div 11,1)$ кДж	3
	Если $Q \in (10,5 \div 10,7)$ кДж или $Q \in (11,1 \div 11,3)$ кДж (2 балла)	
	Если $Q \in (10,3 \div 10,5)$ кДж или $Q \in (11,3 \div 11,5)$ кДж (1 балл)	
3	Учтено изменение показаний весов, связанное с погружением цилиндра (1 балл) и теплообмена азота с окружающей средой (1 балл)	2
4	Определена масса азота, выкипевшая из-за теплообмена с цилиндром $\Delta m_a \in (50 \div 54)$ г	3
	$m_N \in (48 \div 50)$ г или $m_N \in (54 \div 56)$ г (2 балла)	
	$m_N \in (46 \div 48)$ г или $m_N \in (56 \div 58)$ г (1 балл)	
6	Получен ответ для $\lambda \in (200 \div 245)$ кДж/кг	2